9. 薄肉・厚肉円筒殻／球殻

9.1 内圧を受ける薄肉円筒

石油やガスの貯蔵タンクや圧力容器の形状は円筒や球形の場合が多い。また、その厚さは半径に比べて薄くなっている。このような薄肉の構造物の内圧がかかる場合の応力と変形を考える。

図 9.1 のような厚さの薄い円筒殻に一定の内圧 P_{in} が加わる場合を考える。圧力容器や配管などがこの例である。図 9.1 のような円筒殻の変位や応力・ひずみは円柱座標系（r, θ, z）で定義される。すなわち、応力であれば、半径方向応力（半径応力）σ_r、周方向応力（周応力）σ_θ、軸方向応力（軸応力）σ_z を考える。

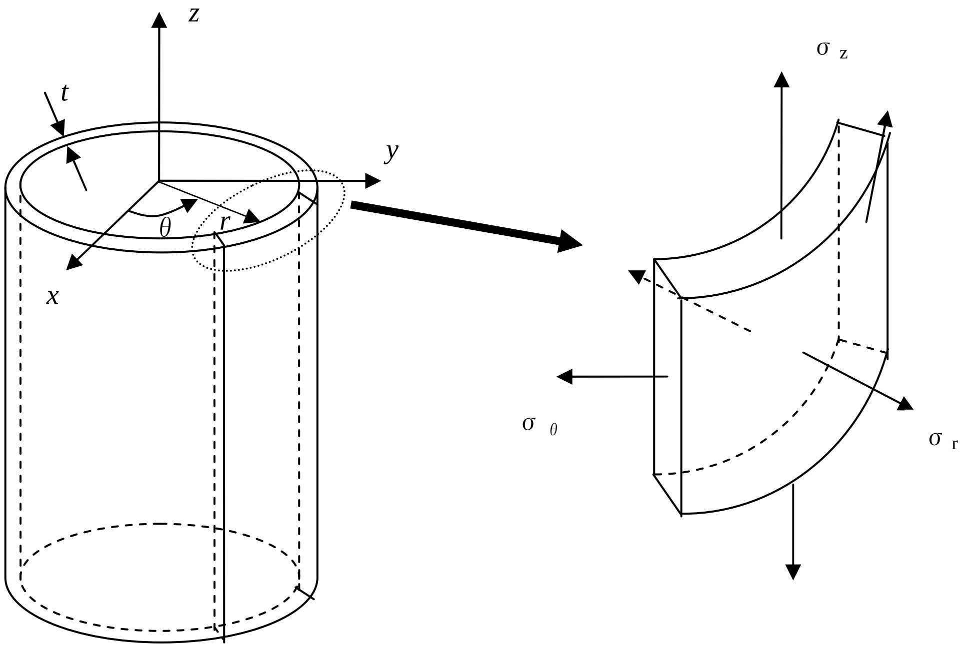
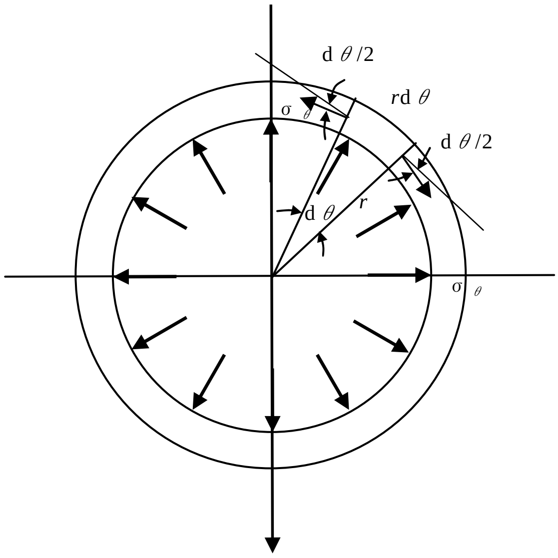


図 9.1 内圧を受ける薄肉円筒



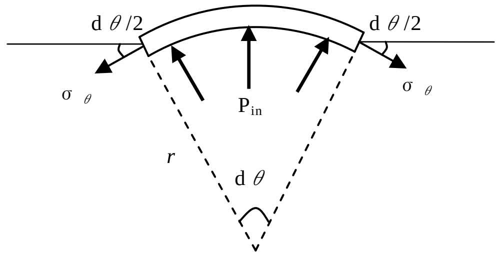


図 9.2 内圧を受ける薄肉円筒（断面図）

円筒殻は内圧によって膨張し、引っ張りの周方向応力を受ける。図 9.2 に内半径 r、厚さ t の円筒殻の断面の釣り合いの状態を示す。円筒殻の軸方向の単位長さ、円周方向の rdθ の要素を取り出し、半径方向の力の釣り合いを考える。円筒殻の厚さが直径に比べて小さいときは，周方向応力は厚さ方向に均一と近似できる。

$$P_{in} r d\theta - 2\sigma_\theta t \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

が得られ、sin(dθ/2)～dθ/2 から、

$$\sigma_\theta = \frac{P_{in} r}{t}$$

が得られる。薄肉円筒は r に対して、t が十分に小さいという設定なので、周方向応力は内圧 P_{in} に対して、大きくなる。

次に、軸方向応力 σ_z を考える。図 9.3 のように円筒穀が両端においてふたで閉じられている場合には､ふたに作用する内圧が円筒殻を軸方向に引っ張る｡軸方向の力の釣合いを考えると、ふたに作用する力と、発生する軸方向応力による内力が釣り合う条件より。

$$2\pi r \sigma_z = P_{in} \pi r^2$$

これより、以下の式が得られる。

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\frac{P_{in} r}{t} = \frac{1}{2}\sigma_\theta$$

軸方向応力は、端部が閉じられていれば、端部の形状（例えば球形構造）に依存しない。計算の便宜上、図 9.3 のような平面で閉じられた形状を用いたが、このような構造は端部で大きな応力集中が生じるため、実用的ではない。

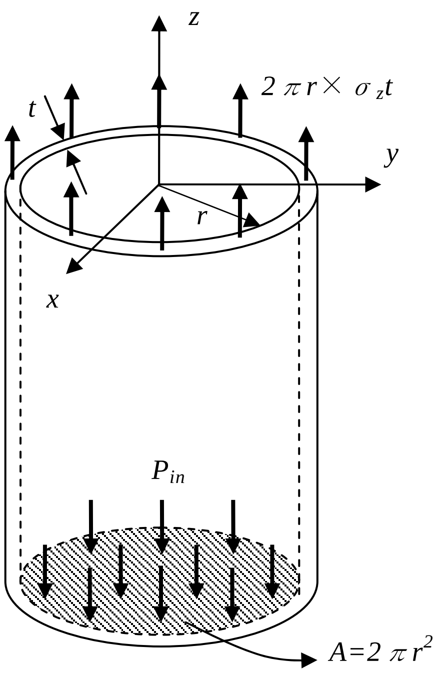


図 9.3 端部が閉じられた内圧を受ける薄肉円筒

最後に、径方向応力 σ_r を考える。σ_r は内面で明らかに $-P_{in}$ に等しくなり、外面でゼロになることがわかる。よって、σ_θ や σ_z と比べて極めて小さく、実用上は無視できる。

ひずみは、フック則に周方向応力と軸方向応力を代入して、

$$\varepsilon_z = \frac{P_{in}r}{Et}\left(\frac{1}{2}-\nu\right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{P_{in}r}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$$

となる。半径方向の増加 u_r/r は、以下のように定義され、周方向ひずみと等しいことがわかる。ここで、u_r は半径方向変位である。

$$\frac{u_r}{r} \equiv \frac{(r+u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \varepsilon_\theta$$

9.2 内圧を受ける薄肉球殻

内圧を受ける薄肉球殻を考える。球殻は中心に対して対称であり、図 9.4 のように、あらゆる接線方向に対して等しい周方向応力 σ_θ と、あらゆる半径方向に対して等しい径方向応力 σ_r が生じる。薄肉円筒と同様、σ_r は σ_θ に対して、十分に小さく無視できる。球殻の厚さが直径に比べて小さいときは，周方向応力は厚さ方向に均一と近似できる。

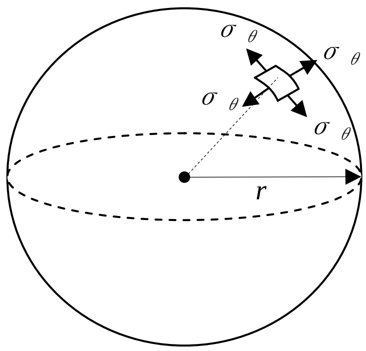


図 9.4 薄肉球殻

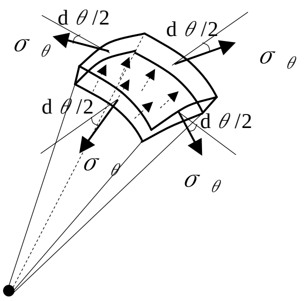


図 9.5 薄肉球殻の応力成分

薄肉球殻の場合も円筒と同様に、内圧によって球殻が膨張し、引っ張りの周方向応力が生じる。これを図にしたものが図 9.5 であり、釣り合い条件から以下の関係式が得られ、周方向応力 σ_θ を得ることができる。

$$P_{in}(rd\theta)^2 - 4\sigma_\theta t(rd\theta)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

sin(d θ /2)～d θ /2 から、

$$\sigma_\theta = \frac{P_{in} r}{2t}$$

が得られる。球殻の周方向応力は同じ半径の円筒の周方向応力の半分である。よって、同じ内圧であれば、球形の容器がより厚さを薄くすることができる。

9.3 内圧／外圧を受ける厚肉円筒

内半径 r_{in}, 外半径 r_{out} の厚肉円筒に内圧 P_{in} が作用する場合の円筒殻に生じる応力と変形を求める。薄肉円筒と同様に、図 9.6 のように力の釣り合いを考える。しかしながら、薄肉円筒のように径方向応力 σ_r を無視したり、周方向応力 σ_θ を厚さ方向に均一であると仮定することはできない。

具体的な算出手順は、微分方程式の解法になり、複雑であるため、本書では、結果のみを記載する。

応力成分は、以下のようになり、

$$\sigma_r = \frac{P_{in} r_{in}{}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2}\left(1 - \frac{r_{out}^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{P_{in} r_{in}{}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2}\left(1 + \frac{r_{out}^2}{r^2}\right)$$

σ_r は、薄肉円筒と時と同様に、内側($r=r_{in}$)で最大($\sigma_r=-P_{in}$)となり、外側でゼロになる。σ_θ は内側で最大となり、外側で最少となる。

両端が解放されている場合の内側における半径方向の変位は以下のようになる。

$$(u_r)_{r=r_{in}} = \frac{P_{in} r_{in}}{E}\left(\frac{r_{out}^2 + r_{in}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2} + \nu\right)$$

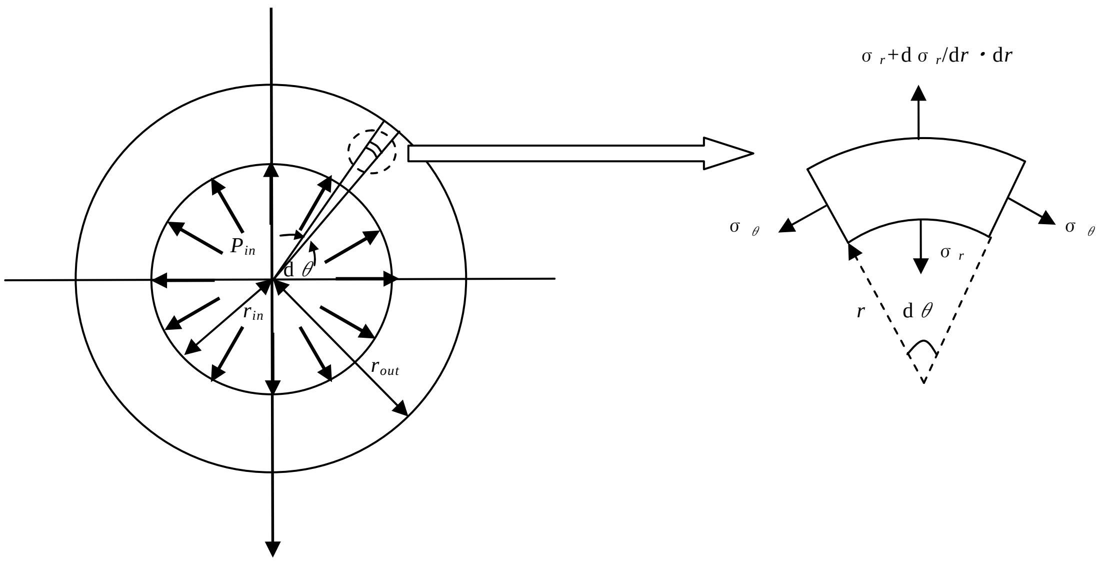


図 9.6　内圧を受ける厚肉円筒（断面図）

内圧ではなく、外圧 P_{out} を受ける場合は、以下のような式になる。

$$\sigma_r = -\frac{P_{out} r_{out}{}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2}\left(1 - \frac{r_{in}^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = -\frac{P_{out} r_{out}{}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2}\left(1 + \frac{r_{in}^2}{r^2}\right)$$

σ$_r$、σ$_\theta$ ともに、圧縮応力である。σ$_r$ は外側で σ$_r$=-P$_{out}$ となり、最大になる。σ$_\theta$ は内側で最大になる。

両端が解放されている場合の外側における半径方向の変位は以下のようになる。

$$(u_r)_{r=r_{out}} = -\frac{P_{out} r_{out}}{E}\left(\frac{r_{out}^2 + r_{in}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2} - \nu\right)$$

例題 1　薄肉円筒と厚肉円筒の比較と近似式

内外半径比（$n=r_{in}/r_{out}$)の円筒殻に内圧 P_{in} が作用する時の周方向の最大応力を求める。内外半径比が 1 に近い場合は、薄肉円筒と見なすことができるが、小さい場合は、厚肉円筒として取り扱う必要がある。

（1）薄肉円筒の式がどの程度の内外半径比まで使用可能かを考察するために、薄肉円筒と厚肉円筒の最大応力の比の内外半径比の依存性を求めよ。

（2）薄肉円筒の式を使った近似式として、以下の式を考える。

$$\sigma_\theta^{applox} = \frac{P_{in}(r_{in} + \beta t)}{t} = \frac{P_{in}(r_{in} + \beta(r_{out} - r_{in}))}{r_{out} - r_{in}} = \frac{P_{in}(n + \beta(1-n))}{1-n}$$

β をいくつに取れば、近似式として妥当かを考察せよ。

（解答）

（1）薄肉円筒の最大応力は、厚さを t として、以下の式となる。

$$\sigma_\theta^{thin} = \frac{P_{in} r}{t} = \frac{P_{in} r_{in}}{r_{out} - r_{in}} = \frac{P_{in} n}{1-n}$$

厚肉円筒は、

$$\sigma_\theta^{thick} = \frac{P_{in}}{r_{out}^2 - r_{in}^2}\left(r_{out}^2 + r_{in}^2\right) = P_{in}\frac{1+n^2}{1-n^2}$$

両者の比は

$$\frac{\sigma_\theta^{thin}}{\sigma_\theta^{thick}} = \frac{n}{1-n}\frac{1-n^2}{1+n^2} = \frac{n(1+n)}{1+n^2} \qquad \ldots(1)$$

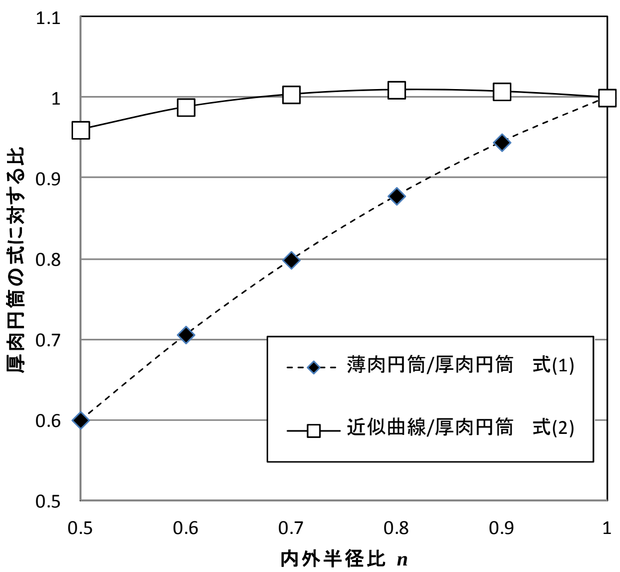
（２）

$$\frac{\sigma_\theta^{applox}}{\sigma_\theta^{thick}} = \frac{(n+\beta(1-n))}{1-n}\frac{1-n^2}{1+n^2} = (\beta+(1-\beta)n)\frac{1+n}{1+n^2}$$

となる。β=0.6 とした式が用いられる。

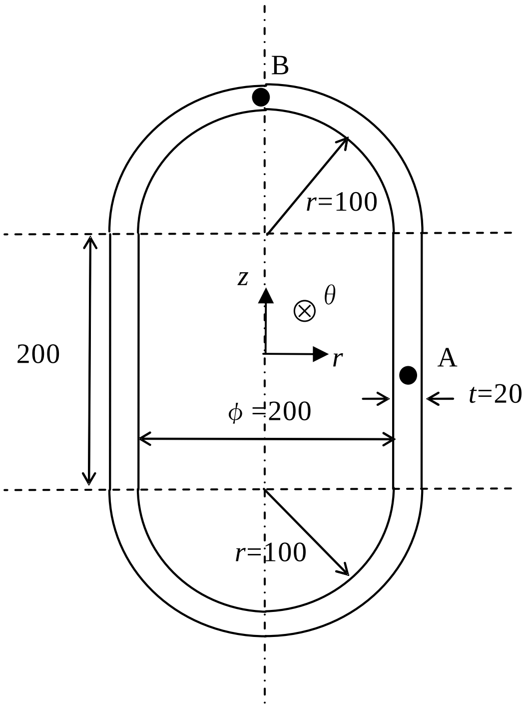
$$\frac{\sigma_\theta^{applox}}{\sigma_\theta^{thick}} = (0.6+0.4n)\frac{1+n}{1+n^2} \qquad \ldots(2)$$

式(1)と(2)のグラフを示す。
薄肉円筒の式は n=0.8 で、12％程度の誤差が出るが、近似式は n=0.5 においても、4%程度しか誤差が出ないことがわかる。



9.4 練習問題

図に示すような圧力容器の内圧 10MPa がかかっている。材料は SB450 で、ヤング率は 205GPa, 降伏応力は 250MPa である。本構造は薄肉構造と近似できるとする。
（１）円胴部の A 点と半球形部の B 点の応力状態を求めよ。
（２）A 点と B 点のミーゼス相当応力を求め、降伏応力に達する臨界圧力を求めよ。



（解答）

（１）

A 点は薄肉円筒と見なすことができるため、

$$\sigma_\theta = \frac{P_{in} r}{t} = 5P_{in} = 50\,\mathrm{MPa}$$

σ r は内圧に等しいので、

$$\sigma_r = -P_{in} = -10\,\mathrm{MPa}$$

σ z は

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\frac{P_{in} r}{t} = \frac{1}{2}\sigma_\theta = 25\,\mathrm{MPa}$$

となる。

B 点は薄肉球殻と見なすことができるため、

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \frac{P_{in} r}{2t} = 2.5P_{in} = 25\,\mathrm{MPa}$$

σ z は内圧に等しいので、

$$\sigma_z = -P_{in} = -10\,\mathrm{MPa}$$

（２）

A 点のミーゼス相当応力は、定義より、

$$\sigma_{\mathrm{Mises}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(-10-25)^2 + (25-50)^2 + (-10-50)^2\right\}} = 52\mathrm{MPa}$$

B 点のミーゼス相当応力は

$$\sigma_{\mathrm{Mises}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(-10-25)^2 + (25-25)^2 + (-10-25)^2\right\}} = 35\mathrm{MPa}$$