有限要素法特論

2003 年 10 月 9 日

有限要素法特論

- 講義内容は，非線形有限要素法の解説
- 夏学期の,「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる.
- 受講していない場合は,「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著，丸善を読んで理解しておくこと.
- 講義資料はhttp://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2002 に昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「非線形有限要素法特論」ですが、同じ内容です。今年の講義で取り扱う内容は特にプログラム関連が増えると思いますが、基礎理論についてはほぼ同じ（誤植修正ぐらい）ですので、予習に活用してください。
- 質問などは，nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで.

有限要素法特論講義予定

1.	10/ 9	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/16	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/23	アイソパラメトリックソリッド要素
4.	10/30	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 （演習あり）
5.	11/ 6	線形有限要素法の基本的なプログラム構造
6.	11/13	幾何学非線形問題の有限要素定式化
7.	11/20	非線形方程式の静的解析手法、超弾性体、弾塑性体
8.	11/27	第７回の演習
9.	12/ 5	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/11	構造要素
11.	12/18	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/ 8	ALE 有限要素流体解析
13.	1/15	ALE 有限要素流体解析
14.	1/22	ALE 有限要素流体解析

有限要素法の復習—代表的数値解法

- 物理学とは、現象を数学（Newton 力学なら微分方程式）によって記述
- 有限要素法とは微分方程式の近似解法である.
- 差分法
  - 支配方程式をそのまま離散化し理論的に簡単, かつプログラミングが容易
  - Euler 表示法で記述されるものには向いているが, Lagrange 表示のものには向いていない.
- 有限要素法
  - 支配方程式を弱形式に変換して離散化
  - 固体・構造問題における解析の主流で, 流体にも適応
  - プログラミングは複雑

微分方程式の境界値問題

- 以下に示すような微分方程式の境界値問題を考える.

  [B]　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad (0 < x < a)$$
$$u(0) = u_0, \quad u(a) = u_a$$

- $f(x)$ が解析的に積分可能な問題であれば, 直接積分することにより解 u が得られる
- 有限要素法は, 微分方程式の弱形式をもとにした近似解法で, 近似解を求めるために必要なプロセスは以下のようになる.
  - 微分方程式を弱形式にする.
  - 有限要素補間関数を導入して, 連続的な関数を, 離散的な節点値に置き換える.
  - それをもとに連立一次方程式を作成し近似解を求める.

強形式と弱形式

- 弱形式：$[V]$　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx \quad \forall v$$
$$u(0) = u(a) = 0$$

但し v は $v(0) = v(a) = 0$ を満たす 2 階微分可能な関数

- 強形式：$[B]$　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad (0 < x < a)$$
$$u(0) = u_0, \quad u(a) = u_a$$

微分方程式の弱形式の導出 1

- 与えられた微分方程式

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad (0 < x < a)$$

の両に辺 $v(0) = v(a) = 0$ を満たす 2 階微分可能な関数 v をかけ定義域全体（ 0 から a） まで積分する.

$$-\int_0^a \frac{d^2u}{dx^2}\, v\, dx = \int_0^a f(x)\, v\, dx$$

- 上式の左辺を部分積分する.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}v\right) = \frac{d^2u}{dx^2}v + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}$$

であることから,

$$-\frac{d^2u}{dx^2}v = -\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}v\right) + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}$$

これより

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx - \left[\frac{du}{dx}\, v\right]_0^a = \int_0^a f(x)\, v\, dx$$

微分方程式の弱形式の導出 2

- $v(0) = v(a) = 0$ から左辺第 2 項は 0

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx - \left[\frac{du}{dx}\,v\right]_0^a = \int_0^a f(x)\,v\,dx$$

- 従って

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx$$

- $v(0) = v(a) = 0$ の境界条件さえ満たせば任意の v について成立する．すなわち $[B]$ から $[V]$ が示された.

微分方程式の弱形式の導出 3

- また $[V]$ から $[B]$ は，この証明を逆にたどることにより，

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx$$

を満たす v は，下式を満たさねばならない．

$$-\int_0^a \frac{d^2u}{dx^2}\,v\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx$$

- すなわち

$$\int_0^a \left\{\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\right\} v\,dx = 0$$

であるが，これが任意の v に対して成立するためには

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0$$

が必要十分条件である．

- よって，$[V]$ の解 u は, $[B]$ の解以外には存在しないことが証明できる.

強形式と弱形式

- すなわち [B] は以下の [V] と等価である.

  [V]　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx \quad \forall v$$

  [B]　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad (0 < x < a)$$

$$u(0) = u(a) = 0$$

- [V] を微分方程式の弱形式という

弱形式と最小化問題 1

- この $[V]$ はさらに以下の最小化問題 $[M]$ と等価である.

  $[V]$　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx \quad \forall v$$

  $[M]$　以下の条件を満たす u を求めよ.

$$W(u) \leq W(v) \qquad \forall v$$

  ただし

$$W(v) = \int_0^a \left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dx} - f(x)\,v\right)dx$$

- 実際に固体構造解析の有限要素定式化を行う場合には，このような最小化問題（実際には停留問題）を元に行うことが多い.

- この理由としては,
  - 材料モデルにこのようなポテンシャルで定義されるものがある.
  - 得られたマトリックスが必ず対称になる
  - Lagrange 未定乗数法が使える

弱形式と最小化問題 2

- $[M] \Rightarrow [V]$ を示す. 上式は, $v = u + w$ とおけば, 下式と等価である.

$$W(u+w) - W(u) \geq 0 \qquad \forall w$$

- これを $W(v)$ の定義をもとに書き下せば以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \left[\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d(u+w)}{dx} \frac{d(u+w)}{dx} \right) - f(x)\,(u+w) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} - f(x)\,u \right\} \right] dx \\
&= \int_0^a \left[\left\{ \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} - f(x)\,w \right\} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dx} \right] dx \geq 0
\end{aligned}$$

弱形式と最小化問題 3

- この式は, 任意の w について成立しなければならないので, α を任意のスカラーとして w に αw を代入しても成立しなければならない. このとき, 以下のように整理される.

$$\alpha \int_0^a \left\{ \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - f(x)\, w \right\} dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^a \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dx} dx \geq 0$$

- $w \equiv 0$ のとき式左辺は 0 になるので, 成立する.
- $w \not\equiv 0$ のときはこれを α の 2 次方程式とみる.
- すなわち

$$\begin{aligned}
y &= a\alpha^2 + b\alpha + c \\
a &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dx} dx \\
b &= \int_0^a \left\{ \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - f(x)\, w \right\} dx \\
c &= 0
\end{aligned}$$

弱形式と最小化問題 4

- $y \geq 0$ であるための必要十分条件は, $a > 0$ かつ$b^2 - 4ac \leq 0$ (判別式)であるが，今回の場合は$b = 0$ が必要十分条件となる.
- 即ち,
$$\int_0^a \left\{ \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - f(x)\,w \right\} dx = 0$$
- よって，$[M]$ から $[V]$ が示された.
- $[V] \Rightarrow [M]$ については, $W(u+w) - W(u)$ を定義に基づき計算すると，以下のようになることから証明できる.

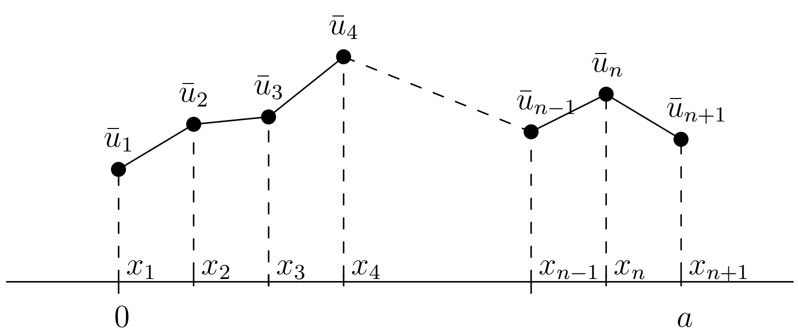
$$\begin{aligned}
&W(u+w) - W(u) \\
&= \int_0^a \left[\left\{ \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - f(x)\,w \right\} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dx} \right] dx \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dx} dx \geq 0
\end{aligned}$$

弱形式の近似解法 — 積分区間の分割

- 弱形式の近似解を有限要素法により求める.
- まず u の定義域 $[0, a]$ を n 個の重なりのない区間 $[x_i, x_{i+1}]\,(i = 1 \sim n)$ に分割する.
- この $x_i\,(i = 1 \sim n+1)$ を節点と呼ぶ.
- このとき $\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx$ の積分は以下のように変更できる.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \cdot v\,dx$$

- 近似解は節点 $x_i\,(i = 1 \sim n+1)$ では $\bar{u}_i\,(i = 1 \sim n+1)$ の値をとり, 節点 x_i と節点 x_{i+1} の間では線形的に変化すると仮定する．　また，v についても同様の関数を用いることにする.

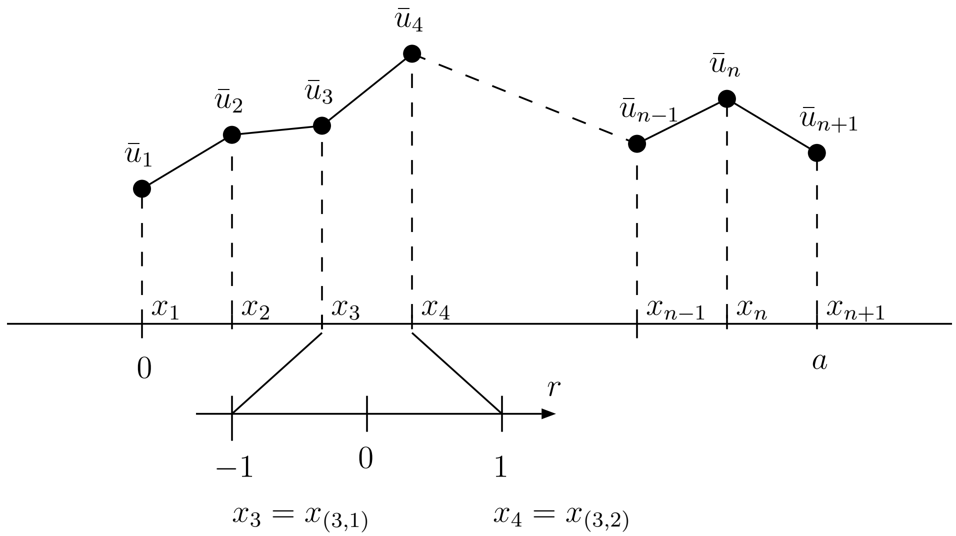


有限要素補間 1

- それぞれの積分区間の始点 x_i, 終点 x_{i+1} を便宜的に $x_{(i,1)}$, $x_{(i,2)}$ と表す.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot v \, dx$$

- $x_{(i,1)}$ が -1, $x_{(i,2)}$ が 1 にそれぞれの区間で変数変換を行なう.

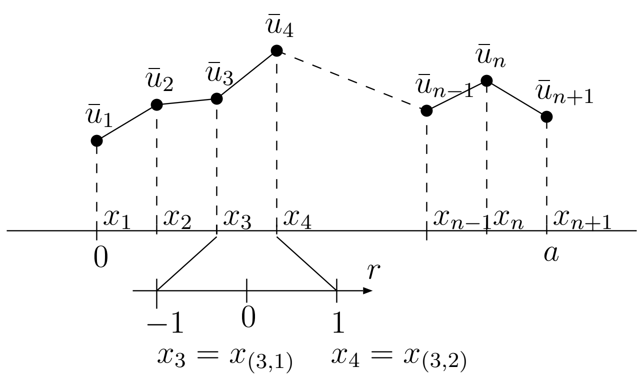


有限要素補間2

- このとき, パラメータ $r\,(-1 \leq r \leq 1)$ を用いると $[x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ に含まれる x は, 以下の形式で表される.

$$
\begin{aligned}
x &= N^{(1)} x_{(i,1)} + N^{(2)} x_{(i,2)} \\
N^{(1)} &= \frac{1}{2}(1-r) \\
N^{(2)} &= \frac{1}{2}(1+r)
\end{aligned}
$$

- $N^{(i)}$ を有限要素法補間関数, あるいは単に補間関数と呼ぶ.

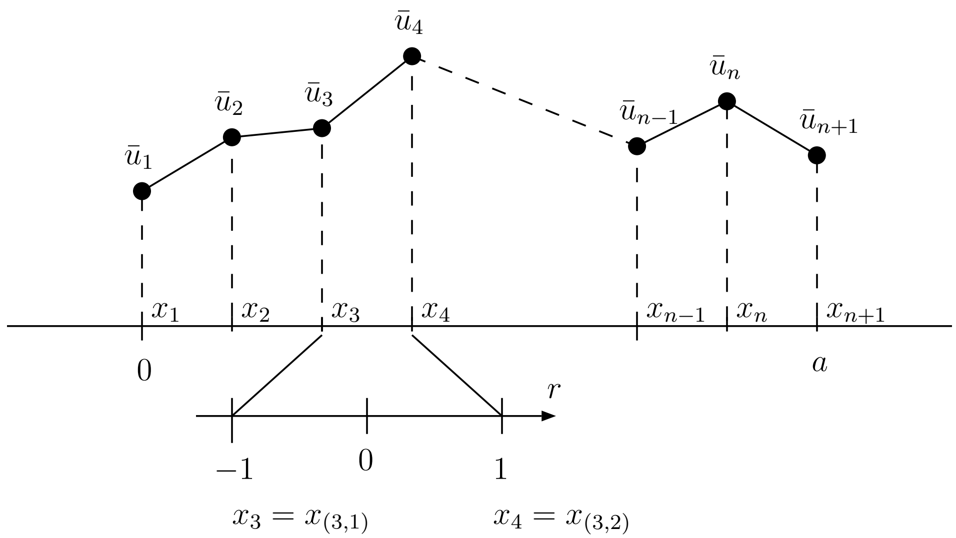


有限要素補間3

- $\bar{u}$,$\bar{v}$ についても同様にパラメータ $r\,(-1 \le r \le 1)$ を用いて以下の形式で表す.

$$\bar{u} = N^{(1)}\bar{u}_{(i,1)} + N^{(2)}\bar{u}_{(i,2)}$$
$$\bar{v} = N^{(1)}\bar{v}_{(i,1)} + N^{(2)}\bar{v}_{(i,2)}$$

- ただし, $\bar{u}_{(i,1)} = \bar{u}_i$, $\bar{u}_{(i,2)} = \bar{u}_{i+1}$, $\bar{v}_{(i,1)} = \bar{v}_i$, $\bar{v}_{(i,2)} = \bar{v}_{i+1}$ である.



微分の離散値による表現

- 弱形式を近似解で置き換えたもの

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{d\bar{u}}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot \bar{v}\,dx$$

左辺の被積分関数に含まれている $\bar{u}, \bar{v}$ の x に関する微分は, 微分の連鎖則を用いることにより以下のように求められる.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(N^{(1)}\bar{u}_{(i,1)} + N^{(2)}\bar{u}_{(i,2)}\right) \\
&= \frac{dN^{(1)}}{dx}\,\bar{u}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dx}\,\bar{u}_{(i,2)} \\
&= \frac{dN^{(1)}}{dr}\frac{dr}{dx}\,\bar{u}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr}\frac{dr}{dx}\,\bar{u}_{(i,2)}
\end{aligned}$$

- 上式に現れる $\dfrac{dr}{dx}$ については以下のように逆数が求められる.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dr} &= \frac{d}{dr}\left(N^{(1)}x_{(i,1)} + N^{(2)}x_{(i,2)}\right) \\
&= \frac{dN^{(1)}}{dr}\,x_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr}\,x_{(i,2)}
\end{aligned}$$

要素マトリックス 1

- これらを用いると弱形式の近似

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}}\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}}f\cdot\bar{v}\,dx$$

  の左辺被積分関数は以下のようにマトリックス表示できる

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}&=\left(\frac{dN^{(1)}}{dx}\,\bar{u}_{(i,1)}+\frac{dN^{(2)}}{dx}\,\bar{u}_{(i,2)}\right)\left(\frac{dN^{(1)}}{dx}\,\bar{v}_{(i,1)}+\frac{dN^{(2)}}{dx}\,\bar{v}_{(i,2)}\right)\\&=\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{bmatrix}\frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\\ \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- 各積分区間 $[x_{(i,1)},x_{(i,2)}]$ で, $J_{(i)}=\dfrac{dx}{dr}$ とすれば, 下式のようになる.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{bmatrix}\frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\\ \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}J_{(i)}\,dr=\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{Bmatrix}N^{(1)}\\ N^{(2)}\end{Bmatrix}f\,J_{(i)}\,dr$$

要素マトリックス2

- $\bar{v}_{(i,1)}$, $\bar{v}_{(i,2)}$, $\bar{u}_{(i,1)}$, $\bar{u}_{(i,2)}$ は節点での値であり，積分変数 r については定数であるから，積分の外に出すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{bmatrix}\frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\\ \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}J_{(i)}\,dr\\
&=\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\\ \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\end{bmatrix}J_{(i)}\,dr\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{Bmatrix}N^{(1)}\\ N^{(2)}\end{Bmatrix}f\ J_{(i)}\,dr=\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\int_{-1}^{1}\begin{Bmatrix}N^{(1)}\\ N^{(2)}\end{Bmatrix}f\ J_{(i)}\,dr
$$

- 下式によって $[K^{(i)}]$, $\{F^{(i)}\}$ を定義する $[K^{(i)}]$ を要素マトリックス等と呼ぶ．

$$
[K^{(i)}]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)}\\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)}\end{bmatrix}=\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\\ \frac{dN^{(1)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx}\frac{dN^{(2)}}{dx}\end{bmatrix}J_{(i)}\,dr \qquad \{F^{(i)}\}=\begin{Bmatrix}F_1^{(i)}\\ F_2^{(i)}\end{Bmatrix}=\int_{-1}^{1}\begin{Bmatrix}N^{(1)}\\ N^{(2)}\end{Bmatrix}f\ J_{(i)}\,dr
$$

全体マトリックス1

- 下式の両辺を $\sum$ を用いずに書き下す.

$$\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{bmatrix}K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)}\\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{Bmatrix}F_1^{(i)}\\ F_2^{(i)}\end{Bmatrix}$$

- すなわち

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{bmatrix}K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)}\\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(i,1)}\\ \bar{u}_{(i,2)}\end{Bmatrix}\\ &=\{\bar{v}_{(1,1)}\ \bar{v}_{(1,2)}\}\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)}\\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(1,1)}\\ \bar{u}_{(1,2)}\end{Bmatrix}+\{\bar{v}_{(2,1)}\ \bar{v}_{(2,2)}\}\begin{bmatrix}K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)}\\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(2,1)}\\ \bar{u}_{(2,2)}\end{Bmatrix}\\ &+\cdots+\{\bar{v}_{(n,1)}\ \bar{v}_{(n,2)}\}\begin{bmatrix}K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)}\\ K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{(n,1)}\\ \bar{u}_{(n,2)}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\}\begin{Bmatrix}F_1^{(i)}\\ F_2^{(i)}\end{Bmatrix}\\ &=\{\bar{v}_{(1,1)}\ \bar{v}_{(1,2)}\}\begin{Bmatrix}F_1^{(1)}\\ F_2^{(1)}\end{Bmatrix}+\{\bar{v}_{(2,1)}\ \bar{v}_{(2,2)}\}\begin{Bmatrix}F_1^{(2)}\\ F_2^{(2)}\end{Bmatrix}+\cdots+\{\bar{v}_{(n,1)}\ \bar{v}_{(n,2)}\}\begin{Bmatrix}F_1^{(n)}\\ F_2^{(n)}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

全体マトリックス２

- ここでたとえば，$\bar{u}_1 = \bar{u}_{(i,1)}$, $\bar{u}_2 = \bar{u}_{(i,2)}$, $\bar{v}_1 = \bar{v}_{(i,1)}$, $\bar{v}_2 = \bar{v}_{(i,2)}$ なので，以下のように強引にマトリックス表示することができる．

$$\{\bar{v}_{(1,1)}\ \bar{v}_{(1,2)}\}\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_{(1,1)} \\ \bar{u}_{(1,2)} \end{Bmatrix} = \{\bar{v}_1\ \bar{v}_2\}\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}\}\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1} \end{Bmatrix}$$

- 2 番目のマトリックスについては，以下のようになる．

$$\begin{aligned} \{\bar{v}_{(2,1)}\ \bar{v}_{(2,2)}\}\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_{(2,1)} \\ \bar{u}_{(2,2)} \end{Bmatrix} &= \{\bar{v}_2\ \bar{v}_3\}\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}\}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

全体マトリックス３

- 同様に i 番目のマトリックスについては，以下のようになる．

$$
\{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\} \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}\} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1} \end{Bmatrix}
$$

- これをもとに，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \{\bar{v}_{(i,1)}\ \bar{v}_{(i,2)}\} \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} \\
&= \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}\} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & \\ & & K_{21}^{(3)} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

全体マトリックス4

- 要素マトリックスを重ね合わせた $n+1 \times n+1$ 次元のマトリックス $[K]$ を, 全体マトリックス等と呼ぶ.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & & \\ & & K_{21}^{(3)} & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- また, $\{F\}$ を成分で書けば以下のようになる.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

- 以上のマトリックス表示を用いると

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{d\bar{u}}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot \bar{v}\,dx$$

は, 以下のように表すことができる.

$$\{\bar{v}\}^T[K]\{\bar{u}\} = \{\bar{v}\}^T\{F\}$$

全体マトリックス5

- これは任意の $\bar{v}$ に対して

$$\{\bar{v}\}^T[K]\{\bar{u}\} = \{\bar{v}\}^T\{F\}$$

$$\{\bar{v}\}^T[[K]\{\bar{u}\} - \{F\}] = 0$$

  が成立することを要求しているが, これは

$$[K]\{\bar{u}\} = \{F\}$$

  のときのみ成立する.

- すなわち, 微分方程式の弱形式は, 以下の形式の連立 1 次方程式により近似解を求められる.

$$[K]\{\bar{u}\} = \{F\}$$

- 以上が，有限要素法の基本的な手順である．

有限要素法の離散化誤差

- 有限要素法は微分方程式の近似解法
- 微分方程式の解は連続であるのに対して、有限要素法の解は未知数の数だけで定まる範囲
- 本質的に誤差を伴う
- これを、離散化誤差と呼ぶ
- 有限要素分割が細かくなれば、誤差はいくらでも減少するのか？

用語の定義

- 内積: V を $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間とする。双一次形式 $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \boldsymbol{R}$ が以下の条件を満たすとき内積と呼ぶ

$$(u,v) = (v,u)$$

$$(cu,v) = c(u,v) \quad c \in \boldsymbol{R}$$

$$(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$$

$$(u,u) \geq 0 \quad (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

- ノルム: $\| \cdot \|: V \to \boldsymbol{R}$ が以下の条件を満たすときノルムと呼ぶ

$$\| u \| \geq 0 \quad \| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\| cu \| = |c| \; \| u \| \quad c \in \boldsymbol{R}$$

$$\| u+v \| \leq \| u \| + \| v \|$$

- たとえば $(u,u)^{1/2}$ はノルムの条件を満たす

- Schwarz の不等式

$$|(u,v)| \leq \| u \| \, \| v \|$$

誤差最小の原理 1

- 記号の整理

$$(u,v)_H = \int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

$$(u,v)_L = \int_0^a u\,v\,dx$$

$$\parallel u \parallel_H = \{(u,u)_H\}^{(1/2)}$$

$$\parallel u \parallel_L = \{(u,u)_L\}^{(1/2)}$$

- 弱形式

$$\int_0^a \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^a f(x)\,v\,dx \quad \Rightarrow \quad (u,v)_H = (f,v)_L$$

- 弱形式の離散化

$$\int_0^a \frac{d\bar{u}}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}\,dx = \int_0^a f\,\bar{v}\,dx \quad \Rightarrow \quad (\bar{u},\bar{v})_H = (f,\bar{v})_L$$

誤差最小の原理 2

- $(*1)$ の v として $\bar{v}$ をとることができる

$$(u, v)_H = (f, v)_L \tag{$*1$}$$

$$(\bar{u}, \bar{v})_H = (f, \bar{v})_L \tag{$*2$}$$

- すなわち

$$(u, \bar{v})_H = (f, \bar{v})_L \tag{$*3$}$$

- $(*2)$ および $(*3)$ より

$$(u - \bar{u}, \bar{v})_H = 0 \tag{$*4$}$$

- 離散化された解の候補 $\bar{w}$ に対して、$\bar{u} - \bar{w}$ も $(*2)$ の $\bar{v}$ としてとることができる。($\bar{u} - \bar{w}$ は両端で 0 になるので) 従って $(*4)$ より

$$(\bar{u} - u, \bar{u} - \bar{w})_H = 0 \tag{$*5$}$$

$$(\bar{u} - u, \bar{u} - \bar{w})_H = (\bar{u} - u, \bar{u} - u + u - \bar{w})_H = 0 \tag{$*6$}$$

$$(\bar{u} - u, \bar{u} - u)_H = (\bar{u} - u, \bar{w} - u)_H \tag{$*7$}$$

誤差最小の原理 3

- 右辺に Schwarz の不等式を用いると

$$\| \bar{u} - u \|_H^2 \leq \| \bar{u} - u \|_H \| \bar{w} - u \|_H$$

- すなわち

$$\| \bar{u} - u \|_H \leq \| \bar{w} - u \|_H$$

- $\bar{u} - u$ のノルムは、近似解と正解と（ある種の）誤差
- $\bar{w}$ は解の候補全体の任意のものをとりうる。
- 近似解の候補全体のうちもっとも正解に近いものが $\bar{u}$
- これを「誤差最小の原理」とよぶ。

オーダー評価と関数自体の評価

- 要素の長さの最大を h として、以下の関係が成り立つことが証明できる。これを「オーダー評価」とよぶ

$$\| \bar{u} - u \|_H \leq h \| f \|_L$$

- 関数自体の誤差 $\| \bar{u} - u \|_L$ については以下の関係が成り立つことが証明できる。

$$\| \bar{u} - u \|_L \leq h^2 \| f \|_L$$

- 詳しくは、「有限要素法概説」菊地文雄を参照のこと